# Segundo Parcial de Álgebra II

1. Sea $A$ un dominio íntegro y $K(A)$ su cuerpo de fracciones. El *rango* de un $A$-módulo $M$ es $rg(M) = \dim_{K(A)} M_0$ (la localización de $M$ en el ideal nulo).

   *a*) Si $M$ es finitamente generado, entonces $rg(M) < \infty$.

   *b*) Para toda sucesión exacta corta de $A$-módulos finitamente generados

   $$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

   vale que $rg(M) = rg(M') + rg(M'')$.

   *c*) Para toda sucesión exacta de $A$-módulos finitamente generados

   $$0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$$

   vale que $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i rg(M_i) = 0$.

2. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser posible, de una demostración. Caso contrario muestre un contraejemplo.

   *a*) Si $A$ es un DFU entonces todo $A$-módulo finitamente generado admite una presentación finita.

   *b*) Si $A$ es un DIP y $M$ es un $A$-módulo de torsión, entonces $An(M) \neq 0$.

3. Un $A$-módulo se dice *indescomponible* si no es posible escribirlo como suma directa de dos submódulos no triviales. Muestre que si $A$ es un anillo noetheriano o artiniano, entonces todo $A$-módulo finitamente generado se descompone como suma directa finita de submódulos indescomponibles.

4. Sea $A$ un dominio de ideales principales y $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Pruebe que $mcd(a_1, \ldots, a_n) = 1$ si y sólo si existe un $A$-submódulo $C \simeq A^{n-1}$ de $A^n$ tal que $A^n$ es la suma directa interna de $\langle a \rangle$ y $C$.

   (*Sugerencia: Considere la sucesión* $0 \to A \xrightarrow{\cdot a} A^n$)